Desarrollos recientes en la teoría de la Elección Social

Salvador Barberá
Departamento de Teoría Económica
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Autónoma de Madrid

INTRODUCCION

La teoría de la elección social se ocupa del estudio formal de procedimientos mediante los que una sociedad decide entre opciones alternativas en base a las preferencias de sus miembros. De estos procedimientos nos interesan sus regularidades: no tanto sus decisiones ante una situación dada, sino cómo se articulan éstas a medida que varían las preferencias individuales y las alternativas entre las que escoger. Cada procedimiento concreto podrá o no presentar determinadas regularidades. Se tratará de analizar, desde diversas formulaciones alternativas, la posibilidad de diseñar procedimientos que cumplan ciertos requisitos preestablecidos que los hagan atractivos como métodos para compatibilizar los intereses individuales en forma de criterios sociales.

Los procedimientos de elección social admiten muchas interpretaciones, y por ello convergen en su estudio especialistas de varias procedencias: filósofos, matemáticos, estudiosos de ciencia política y economistas. El interés del economista por el tema responde a estímulos de origen diverso. Común a todos ellos, sin embargo, sería la constatación del hecho que, implícita o explícitamente, aquél se ve abocado a pronunciarse, a emitir juicios de valor ante vías de acción mutuamente excluyentes, y que de dichas tomas de posición se siguen consecuencias que afectan a colectividades más o menos amplias. Tener en cuenta que dichas colectividades son heterogéneas, que en ellas coexisten intereses y puntos de vista conflictivos, y estudiar distintos procedimientos para compatibilizarlos y las dificultades que se plantean al hacerlo podrá no resolver los problemas de decisión del economista. Pero sí es de esperar que, al hacerse consciente de que sus decisiones no son neutrales, sus tomas de posición, cualesquiera que sean, resulten más lúcidas y coherentes que si se adoptasen bajo falsas hipótesis de «neutralidad científica».

En este trabajo recogemos los principales desarrollos recientes de la teoría de la elección social. Cada Sección se divide en dos partes diferenciadas. En la primera presentamos con cierto detalle algún resultado central al tema que nos ocupa en cada caso, como ejemplo del tipo de cuestión que nos proponemos desarrollar. La segunda parte de cada sección es más compacta, y en ella describimos los trabajos más significativos, a nuestro juicio, que se han dado en cada área de investigación.

Creemos haber hecho referencia a todas las grandes direcciones de desarrollo reciente de la teoría. No nos hemos propuesto, en cambio, la tarea, tan ingente como inútil, de establecer una lista bibliográfica exhaustiva. El lector interesado en un tema concreto podrá construirse su propia lista de títulos a partir de las referencias contenidas en las obras aquí citadas. Pueden tomarse como puntos de arranque las bibliografías de los libros de Sen [92], Fishburn [33] y Pattanaik [74], y de las revisiones de Sen [96] y Fishburn [35]. La bibliografía presentada al final de este trabajo se refiere exclusivamente a las obras consultadas para su redacción, que aparecen en su mayoría citadas en contexto a lo largo del artículo.

1. Los elementos de partida.

Nuestro propósito es estudiar las características de los procedimientos a través de los cuales una sociedad que se enfrenta a diversas opciones alternativas decidirá cuál de ellas adoptar en función de las preferencias de sus miembros. Formalizaremos los elementos de partida del problema del siguiente modo: Sea un conjunto X, cuyos elementos denotaremos por $x, y, z, \ldots$ A cada elemento le llamaremos una alternativa, y a X el conjunto de las alternativas.

Sea $I = \{1, \ldots, N\}$ un segmento inicial de los números naturales. Diremos que I es el conjunto de los individuos.

Sea $\mathfrak{R}$ el conjunto de relaciones de orden en X. Es decir, el conjunto de todas las relaciones binarias completas, reflexivas y transitivas en X, a las que designaremos por $R, R', R'', \ldots$ (1).

Sea $\mathfrak{R}^N = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \ldots \times \mathfrak{R}$ el producto cartesiano N veces de $\mathfrak{R}$. Sus elementos son N-plas de elementos en la forma $(R_1, R_2, \ldots, R_N)$: los llamaremos configuraciones de preferencias y los designaremos por $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$, etc.... (2).

Interpretamos que cada relación $R \in \mathfrak{R}$ expresa las preferencias del individuo a quien se atribuye dicha relación con respecto a las alternativas. Una configuración de preferencias, en este caso, especifica, para cada individuo en I, una determinada relación de preferencias en X. Constituye, pues, una descripción completa de las características de una sociedad que se enfrenta a un problema de elección.

Antes de cerrar esta sección conviene introducir algunas convenciones adicionales. Dada una relación binaria R, definiremos a partir de ella dos relaciones inducidas P e I del siguiente modo:

$$xPy \longleftrightarrow [xRy \ \& \sim (yRx)]$$

$$xIy \longleftrightarrow (xRy \ \& \ yRx)$$

A la relación P la llamaremos de preferencia estricta, y a la I de indiferencia. Es natural interpretar que xPy significa «x es preferido estrictamente a y», y que xIy significa «x e y son indiferentes», teniendo en cuenta que xRy se interpreta como «x es por lo menos tan preferida como y».

Para algunos ejemplos será útil disponer de un procedimiento más gráfico para describir las preferencias individuales. Cuando no se preste a error, escribiremos

R: xyz para indicar que xPy e yPz

La representación de las características relevantes para un problema de elección social como configuraciones de preferencias fue introducida por Arrow [2] y es la más habitual en la literatura. Dos características de esta formalización merecen comentario: que las preferencias individuales aparecen representadas como relaciones de orden, y que sólo dichas preferencias son tenidas en cuenta como base de las decisiones colectivas.

La representación de las preferencias individuales como relaciones de orden corresponde al punto de vista, comúnmente aceptado por los economistas, de que sólo las características ordinales de dichas preferencias pueden y deben ser tenidas en cuenta.

Diversos autores se separan, sin embargo, de esta postura. Unos, aduciendo que la posición ordinalista —suficiente para el desarrollo de la teoría de la demanda del consumidor— es demasiado estrecha para el tratamiento de problemas de elección social, propugnan la incorporación en la teoría de características cardinales en las preferencias individuales (véanse Camacho [19], Sen [92] [96], y las referencias citadas en este último artículo).

Otros autores, en cambio, partiendo de la escasa evidencia empírica en favor de la hipó-

(1) Una relación binaria B es:
(a) Reflexiva, si y sólo si $(\forall x \in X)\ xBx$.
(b) Completa, si y sólo si $(\forall x, y \in X)\ [x \neq y \rightarrow (xBy \vee yBx)]$.
(c) Transitiva, si y sólo si $(\forall x, y, z \in X)\ [(xBy \ \& \ yBz) \rightarrow xBz]$.

(2) Llamamos N-pla a una lista ordenada de N elementos cualesquiera.

tesis de transitividad en el comportamiento individual, relajan dicha hipótesis, bien sea suponiendo que las preferencias individuales son sólo casi-transitivas (Fishburn [28]) o sólo acíclicas (3) *(Brown [18]) o, incluso, que pueden representarse mediante funciones de elección dotadas de ciertas propiedades de coherencia mínimas (Kelly [59]), sin apelar a ningún tipo de relación binaria. Finalmente, otros trabajos incorporan, mediante formulaciones alternativas, la idea que las preferencias individuales son inciertas y dependen de factores aleatorios (Intriligator [54], Fishburn y Gehrlein [39], Camacho [19]).*

La otra característica —que sólo las preferencias individuales cuentan para las decisiones colectivas— puede justificarse desde dos puntos de vista: bien porque, efectivamente, se esté tratando de formalizar mecanismos bajo los cuales esta hipótesis es adecuada (procedimientos de elección políticos por votación), o porque se esté suponiendo implícitamente que otras variables relevantes (recursos, poder, ...) se mantienen constantes. En este segundo sentido, la teoría de la elección social se diferencia de la literatura sobre mecanismos de asignación de recursos (Hurwicz [52]), con la que de otro modo guarda gran parecido formal. Recientemente, Saposnik [86] ha iniciado un intento de incorporar explícitamente en un marco de elección social consideraciones sobre las relaciones de poder.

2. Algunos métodos de elección específicos.

Un método de elección es un conjunto de reglas que, conocida la configuración de preferencias que caracteriza a la sociedad, nos permiten establecer qué alternativas resultan elegidas socialmente. Empecemos por dar algunos ejemplos.

(3) Una relación binaria es casi-transitiva si la relación estricta asociada con ella es transitiva. La condición de aciclicidad la expresamos, por simplicidad, para el caso en que se refiera a una relación binaria completa, único en que vamos a utilizarla.

Diremos que B es acíclica si y sólo si

$$(\forall x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \varepsilon X)\,[\sim (x_2 B x_1), \sim (x_3 B x_2), \ldots, \sim (x_n B x_{n-1})] \rightarrow (x_1 B x_n)$$

A) *El método de mayoría simple.*

Para cada configuración de preferencias dada $(R_1, \ldots, R_N)$, el método de mayoría simple establece una relación binaria M en X, de acuerdo con el siguiente criterio: xMy si y sólo si el número de individuos en $(R_1, \ldots, R_N)$ para quienes xR_iy no es inferior al de aquéllos para los que yR_jx.

Dado un subconjunto cualquiera Y de elementos en X, las alternativas escogidas entre las de Y según este criterio vendrían dadas por

$$C\,(Y, M) = \{\, y \varepsilon Y \mid z \varepsilon Y \rightarrow yMz \,\}$$

Informalmente, una alternativa x tiene mayoría (en sentido débil) sobre otra y si el número de individuos que consideren que y es estrictamente superior a x no excede al de aquellos que prefieren estrictamente x a y. La sociedad elegirá, entre un conjunto cualquiera de alternativas, aquellas que tengan mayoría (débil) sobre todas las demás del conjunto.

Observemos que, en algunos casos, esta regla puede llevar a elecciones sociales vacías. Así, por ejemplo, en una sociedad con tres individuos y tres alternativas con una configuración de preferencias (R_1, R_2, R_3) de la forma

$$R_1\colon xyz$$

$$R_2\colon yzx$$

$$R_3\colon zxy$$

tendríamos que

$$xMy,\ yMz,\ zMx$$

$$\sim (yMx),\ \sim (zMy),\ \sim (xMz)$$

y, por tanto,

$$C\,(\{x, y, z\}, M) = \phi$$

Este ejemplo, conocido como la «*paradoja del voto*», será de interés más adelante.

B) *La cuenta de Borda sobre X.*

La cuenta de Borda le asigna a cada alternativa un número de puntos que depende de su posición en las preferencias individuales: $M-1$ puntos si ocupa el primer lugar, $M-2$

para el segundo, y así sucesivamente, de modo que la alternativa menos preferida no obtenga ninguno (siendo M el número de alternativas en X). Para cada configuración de preferencias dada puede calcularse la puntuación total correspondiente a cada alternativa, y establecer una relación binaria R entre éstas de modo que xRy si y sólo si el número de puntos obtenido por x es mayor o igual que el correspondiente a y. Las alternativas socialmente escogidas en base a dicha relación, entre elementos de un $Y \subset X$, serían los miembros del conjunto

$$C(Y, R) = \{ y \in Y \mid z \in Y \rightarrow yRz \}$$

Obsérvese que, debido a la transitividad de la relación binaria sobre los números reales, la relación R inducida por la cuenta de Borda será siempre transitiva. Por tanto, el criterio de elección social obtenido por este procedimiento tendrá la misma naturaleza formal que las preferencias individuales, a diferencia de lo que ocurre con la mayoría simple.

C) *La cuenta de Borda sobre $\mathfrak{X}$.*

Hemos visto cómo los dos procedimientos anteriores nos proporcionan criterios para escoger entre subconjuntos Y cualesquiera de X. Sea $\mathfrak{X}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. La cuenta de Borda puede utilizarse para escoger directamente entre los elementos de cualquier subconjunto de alternativas, sin hacer referencia a ninguna relación binaria entre ellas. Para ello, dado un conjunto $Y \in \mathfrak{X}$, compuesto por h elementos y una configuración de preferencias $(R_1, \ldots, R_N)$, le daremos $h - 1$ puntos a una alternativa de Y cada vez que aparezca por encima de todos los demás elementos de Y en las preferencias de algún individuo, $h - 2$ puntos cada vez que aparezca en segundo lugar, y así sucesivamente. Resultarían elegidas, en este caso, aquellas alternativas en Y que obtuviesen mayor número de puntos.

El estudio de procedimientos de elección específicos tiene una larga tradición, y constituye de hecho el punto de arranque de la teoría. Para un estudio de algunos antecedentes notables véase Black [10] o Arrow [2, Apéndice]. El método de mayoría simple, inicialmente propugnado por Condorcet, ha sido y sigue siendo un paradigma para la teoría. Recientemente se ha producido una fuerte corriente de interés hacia procedimientos basados en la votación por puntos (Gärdenfors [41], Fishburn [32], Smith [99], Young [105-6]), que generalizan el método propuesto inicialmente por Borda. Otras propuestas originales se deben a Camacho [19], para procedimientos capaces de operar en contextos dinámicos y bajo condiciones de incertidumbre, y a Zeckhauser [107], que propuso el uso sistemático de loterías como criterios de elección.

3. Clases de métodos.

Los anteriores procedimientos coinciden en que son capaces de señalar qué alternativas, entre las de un subconjunto dado, resultarán socialmente escogidas, en base a las características de las preferencias individuales expresadas como elementos de R^N. Difieren, en cambio, en la naturaleza del criterio de elección que se aplica en cada caso. Tanto el método de mayoría simple como la cuenta de Borda sobre X dan lugar a una relación binaria —que se identifica como la «relación de preferencias social», en sentido lato—, que a su vez puede utilizarse como criterio de elección. La cuenta de Borda sobre $\mathfrak{X}$, en cambio, nos indica directamente, para cada subconjunto en $\mathfrak{X}$, cuáles son las alternativas escogidas. A su vez, los dos primeros métodos se diferencian en que la cuenta de Borda sobre X siempre genera preferencias sociales transitivas (de la misma naturaleza que las individuales), no siendo así con el método de mayoría simple, que puede dar lugar a relaciones cíclicas en ocasiones, como demuestra el ejemplo de la «paradoja del voto».

Cada uno de estos procedimientos puede verse como representante de una clase distinta de métodos de elección social, que se distinguirían por su dominio de definición, es decir, por el tipo de criterio de elección que le asignan a cada configuración de preferencias.

Definiremos estas clases generales. Sea $\mathfrak{R}$ el conjunto de las relaciones binarias en X completas y reflexivas.

Una función de agregación de preferencias es una función $s: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$.

Una función de bienestar social es una función $w: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$.

Una función de elección social es una función $f: \mathfrak{R}^N \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ tal que, para todo $Y \varepsilon \mathfrak{X}$ y todo $\mathbf{R} \varepsilon \mathfrak{R}^N$ se cumpla que $f(Y, \mathbf{R}) \subset Y$.

Las funciones de agregación de preferencias son, pues, procedimientos que a cada configuración de preferencias le asignan una relación binaria en X (las «preferencias sociales» resultantes de agregar las de los individuos). Las funciones de bienestar social son un caso particular de las de agregación de preferencias, y garantizan una relación social transitiva. Las funciones de elección social, por su parte, le asignan a cada conjunto de alternativas un subconjunto de éstas, en función de las preferencias individuales. El método de mayoría simple sería, pues, una función de agregación de preferencias, y la cuenta de Borda en X nos daría una función de bienestar social, mientras que si la aplicamos directamente sobre los subconjuntos en $\mathfrak{X}$ genera una función de elección.

El concepto de función de bienestar social se debe a Arrow [2]*; Sen* [92]*, introduce una clase particular de funciones de agregación de preferencias: las que dan lugar a relaciones sociales acíclicas (véase la Sección 5). Pattanaik* [74] *estudia clases aún más generales que nuestras funciones de agregación de preferencias, al permitir que las relaciones sociales puedan no ser completas. Fishburn* [33] *introduce el concepto de función de elección social, aunque añadiendo a nuestra definición el requisito que la elección sólo debe ser vacía cuando lo es el subconjunto de alternativas relevante. Más adelante iremos introduciendo otras clases de procedimientos de elección.*

4. Funciones de bienestar social satisfactorias. El teorema de Arrow.

La teoría de la elección social define condiciones normativas sobre métodos de elección social y estudia su cumplimiento por parte de procedimientos concretos o clases de éstos. Empezaremos por recordar las condiciones consideradas y los resultados obtenidos por Arrow acerca de las funciones de bienestar social, por su importancia histórica y porque esto nos facilitará un hilo conductor a través de los desarrollos posteriores.

Primero, las condiciones. Aunque de momento sólo las utilicemos sobre funciones de bienestar social, las expresaremos en forma que puedan aplicarse sobre cualquier tipo de función de agregación de preferencias. No nos extenderemos demasiado aquí sobre su significado, en parte porque son bien conocidas y también porque hemos de volver sobre sus aspectos más polémicos.

Una función de agregación de preferencias s satisface la *condición de Pareto (P)* si y sólo si a toda configuración de preferencias $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ en la cual todos los individuos prefieran estrictamente x a z, le corresponde una relación social por la que x es también preferida estrictamente a z (para cualquier par x, z). Formalmente, s satisface P si y sólo si

$$(\forall i)\ xP_iz \rightarrow \sim (zs(\mathbf{R})\,x)$$

Una función de agregación de preferencias es *independiente de alternativas irrelevantes (IAI)* si a todo par de configuraciones de preferencias $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}'$ que coinciden en algún subconjunto Y de alternativas, las asigna relaciones sociales que dan lugar a idéntica elección en Y. En otras palabras, la elección social entre los elementos de un subconjunto Y de alternativas sólo depende de las preferencias individuales con respecto a dichas alternativas.

Formalmente, s satisface IAI si y sólo si,

$$(\forall i)\ (\forall z, w\ \varepsilon\ Y)\ [zR_iw \leftrightarrow zR_i'w] \rightarrow [C(Y, s(\mathbf{R})) = C(Y, s(\mathbf{R}'))]$$

Una función de agregación de preferencias es *dictatorial* si existe un individuo en I, el dictador, que imponga socialmente sus preferencias estrictas sobre alternativas en todo caso.

Formalmente, s es dictatorial si existe un $i \varepsilon I$ tal que, para cualquier par $x, y \varepsilon X$ y todo $\mathbf{R} \varepsilon \mathfrak{R}^N$,

$$xP_iy \rightarrow \sim (ys(\mathbf{R})\,x)$$

Arrow se preguntó por la posibilidad de hallar funciones de bienestar social que cumpliesen las condiciones P e IAI sin ser dictatoriales. Su respuesta, negativa, viene dada por su famoso Teorema de Imposibilidad.

Teorema 1 (Arrow).—Si el número de alternativas es mayor que dos, no existe ninguna función de bienestar no dictatorial que satisfaga las condiciones de Pareto y de Independencia de Alternativas Irrelevantes.

La primera reacción ante un resultado como el de Arrow es, naturalmente, negativa. Si se aceptan como objetivos en el diseño de un mecanismo de elección las condiciones impuestas por aquél sobre sus funciones de bienestar social, el teorema de imposibilidad nos dice, ni más ni menos, que dichos objetivos son inalcanzables. Un segundo impulso, más creador, nos llevaría a reconsiderar aquellos objetivos. ¿Hasta qué punto están justificados y suponen metas deseables? ¿Cuáles de ellos son fundamentales y cuáles accesorios? ¿En qué grado se mantienen las dificultades señaladas por Arrow si rebajamos nuestro grado de exigencia para algunos de ellos? Gran parte de la literatura reciente sobre elección social (aunque no toda, como veremos) se ocupa de estas cuestiones.

Un error en la primera demostración propuesta por Arrow de su teorema fue advertido y subsanado por Blau [12]. *En la segunda edición de su obra* [2], *Arrow propone un nuevo procedimiento de prueba. Son demasiadas para ser citadas las variantes existentes de la demostración. Baste mencionar algunas que representan formas de ataque innovadoras: la demostración directa de Blau* [14], *las de Blau* [13] *y Hansson* [49] *utilizando versiones débiles de la condición de I A I, y las de Fishburn* [29] *y Kirman y Sonderman* [61], *que explotan la hipótesis de que el número de individuos en la sociedad es finito y sobre las que volveremos más adelante (véase Sección 9). Finalmente, el Teorema de Imposibilidad puede obtenerse como corolario de otro sobre agregación, muy abstracto y general, debido a Wilson* [104].

Aun cuando la relevancia del Teorema de Imposibilidad es generalmente admitida, y su influencia sobre el posterior desarrollo de la teoría ha sido enorme, tampoco han faltado los autores que han relativizado su significación, bien sea criticando los planteamientos de partida [8], [20], [60], [64], *o minimizando las posibilidades de que los peligros que apunta se concreten en la realidad (Tullock* [100]*).*

5. Transitividad y decisividad.

Una primera característica del teorema de imposibilidad es que se refiere a un tipo específico de procedimientos: las funciones de bienestar social. Como ya hemos visto, éstas constituyen un caso especial dentro de la clase, más amplia, de las funciones de agregación de preferencias. ¿Qué sucedería si, en lugar de preocuparnos por obtener funciones de bienestar social satisfactorias, ampliásemos nuestro campo de búsqueda al conjunto de todas las funciones de agregación de preferencias? En primer lugar, obviamente, dejaríamos de tener garantizado que la relación social obtenida fuese transitiva: las «preferencias sociales» no serían del mismo tipo que las individuales. Esto podría verse, sin embargo, como un problema menor. En efecto: al suponer que las preferencias individuales son transitivas imponemos una hipótesis de coherencia o racionalidad sobre los juicios de valor individuales. Si esta hipótesis —ya hemos indicado en la Sección *1*— no está plenamente justificada ni tan sólo en el caso individual, mucho menos natural resulta imponerla sobre el comportamiento colectivo. No parece existir ninguna razón para exigir que la sociedad se comporte con igual grado de racionalidad que el que suponemos de los individuos que la componen.

Si nos preguntásemos, pues, por la existencia de funciones de agregación de preferencias no dictatoriales que satisfagan las condiciones *P* e *I A I*, la respuesta sería afirmativa: el propio método de mayoría simple reúne ambas condiciones sea cual sea el número de alternativas. Pero este mismo ejemplo nos permite señalar las dificultades que aparecen al abandonar todo tipo de exigencias sobre la racionalidad de la relación social: podría ocurrir que, para determinados casos, dicha relación fuese cíclica (como ocurre con la paradoja del voto —véase la Sección *2*—) y, por tanto, incapaz de elegir entre las distintas alternativas que forman el ciclo. Claramente, un procedimiento de elección que fuese incapaz de escoger en ciertos casos sería insatisfactorio. Resulta, pues, natural, definir la siguiente condición sobre funciones de agregación de preferencias.

Una función de agregación de preferencias es *decisiva* si y sólo si, para toda configuración de preferencias **R** y para todo subconjunto finito y no vacío de alternativas Y, se cumple que $C(Y, s(\mathbf{R})) \neq \phi$.

Toda relación binaria completa, reflexiva y transitiva da lugar a elecciones no vacías a partir de conjuntos finitos y no vacíos de alternativas. Precisamente por ello todas las funciones de bienestar social son decisivas. Sin embargo, no es necesario que la relación social sea transitiva para garantizar elecciones no vacías. Es normal, pues, que nos interesemos por la existencia de funciones de agregación de preferencias no dictatoriales que, además de reunir las condiciones de *I A I* y *P*, sean decisivas. Para ello deberemos reducirnos a aquellas cuyas imágenes son siempre relaciones acíclicas (*4*). Dentro de éstas son especialmente interesantes aquellas que generan relaciones sociales casi transitivas. Llamaremos a unas y otras, respectivamente, funciones de agregación de preferencias acíclicas y casi transitivas. El método de mayoría simple no servirá ya como ejemplo, al no ser decisivo.

Existen otros métodos, sin embargo, que cumplen las condiciones antes mencionadas. Pero no por ello resultan demasiado satisfactorios, porque persisten en ellos rasgos casi dictatoriales. Si nos limitamos, primero, a la clase de funciones de agregación de preferencias casi transitivas, tenemos que, de cumplirse las condiciones *P* e *I A I*, en lugar de un dictador existirán grupos de individuos (oligarquías) capaces de imponer su voluntad cuando coincidan en sus preferencias, y cada uno de cuyos miembros dispondrá de poderes de veto. Si las oligarquías son reducidas, poco se ha mejorado con respecto al caso dictatorial. Si son muy amplias, cualquier conflicto interno quedará por resolver, y de poco valdrá disponer de un mecanismo de agregación que sólo se pronuncie en casos de unanimidad. Queda aún una posibilidad: exigir de la relación binaria que sea simplemente acíclica en todo caso. Dados los resultados que acabamos de citar para funciones de agregación de preferencias casi transitivas con oligarquías amplias, resulta natural exigir un requisito adicional de sensibilidad (respuesta positiva) cuyo objeto es excluir aquellas funciones que soslayan todo conflicto declarándose indiferentes entre alternativas con «excesiva» frecuencia. Pues bien, toda función de agregación de preferencias acíclica que responda positivamente y satisfaga las condiciones *P* e *I A I* tendrá individuos con poder de veto (si el número de alternativas es mayor que tres). Vemos, pues, que la transitividad de las relaciones sociales impuestas por las funciones de bienestar social, aún teniendo cierta relevancia para la expresión del teorema de Arrow, no es su causa fundamental, ya que, incluso relajándola, persisten las dificultades básicas señaladas por aquél. Expresaremos finalmente las nuevas condiciones y resultados introducidos en este apartado:

Un individuo *i tiene poder de veto* sobre una función de agregación de preferencias *s* si, para cualquier configuración de preferencias $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^N$ y todo par x, y de alternativas,

$$xP_iy \rightarrow xs(\mathbf{R})\,y$$

Una función de agregación de preferencias es *oligárquica* si existe un conjunto de individuos $J \subset I$ tal que:

1) Cada miembro de J tiene poder de veto sobre s, y
2) Para cualquier configuración de preferencias $R \in \mathcal{R}^N$ y todo par x, y de alternativas $(\forall j \in J)\, xP_jy \rightarrow \rightarrow \sim [ys(\mathbf{R})\,x]$.

Una función de agregación de preferencias *s responde positivamente* si y sólo si, para todo par x, y de alternativas y cualquier par de configuraciones de preferencias $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}'$ tales que

1) Si a y b son distintas de x, $aR_ib \leftrightarrow aR_i'b$ para todo $i \in I$.
2) Para todo a, $[xP_ia \rightarrow xP_i'a]$ & $[xI_ia \rightarrow xR_ia]$.
3) Para algún $i \in I$, se cumple que

$$yR_ix \,\&\, xP_i'y$$

o bien que

$$yP_ix \,\&\, xR_i'y$$

se cumple que $[xs(\mathbf{R})\,y] \rightarrow \sim [ys(\mathbf{R}')\,x]$.

Teorema 2 (Gibbard).—Toda función de agregación de preferencias casi-transitiva que satisfaga las condiciones de Pareto y de independencia de alternativas irrelevantes es oligárquica.

Teorema 3 (Mas Colell y Sonenschein).—Si el número de alternativas es mayor que tres, toda función de agregación de preferencias

(4) Para una demostración de este hecho, véase Sen [92], Capítulo 1*, Lema 1*.1.

acíclica que responda positivamente y satisfaga las condiciones de Pareto y de *I A I* tendrá individuos con poder de veto sobre ella.

La extensión del análisis al conjunto de las funciones decisivas de agregación de preferencias se debe a Sen [92], [93].

El teorema de imposibilidad para las funciones casi-transitivas lo obtuvieron simultáneamente varios autores (Guha [47], Schwartz, Mas Colell y Sonnenschein [65], aunque la primera demostración parece deberse a Gibbard, en un trabajo no publicado. Véase también Mas Colell [66]. El teorema para funciones acíclicas se debe a Mas Colell y Sonnenschein [65]. Fishburn [34] presenta una generalización del dicho teorema en que se debilita la condición de I A I. Un resultado análogo, en que se abandona la I A I y se imponen a cambio, restricciones en la relación entre el número de alternativas y el de individuos, aparece en Blau y Deb [16].

6. La condición de universalidad. Restricciones en el campo de definición.

Una condición que Arrow impone explícitamente sobre sus funciones de bienestar, y que nosotros hemos introducido implícitamente, es la de universalidad: las condiciones demandadas deberían cumplirse para toda configuración de preferencias. Claramente, si nos limitásemos a exigir de un procedimiento que operase satisfactoriamente sólo en algunas circunstancias, podríamos hallar fácilmente casos sin problemas: así, por ejemplo, casi cualquier procedimiento daría lugar a una ordenación social «razonable» de las alternativas cuando existiese unanimidad en las preferencias individuales. Esto sería, sin embargo, poco informativo. Más interesante resulta localizar clases de configuraciones de preferencias, lo más amplias posibles, capaces de garantizar que, para cualquier configuración dentro de ellas, se satisfagan determinados requisitos. En todo caso, la respuesta a una cuestión de este tipo dependerá de dos factores. Uno, de la función concreta cuyo comportamiento queramos estudiar. Naturalmente, funciones distintas operarán satisfactoriamente sobre campos de definición distintos. Aquí nos vamos a limitar casi exclusivamente —como lo ha hecho la literatura— al estudio del funcionamiento del método de mayoría simple. El otro factor relevante es el tipo de requisito por cuyo cumplimiento nos interesamos. Ya hemos visto que el principal problema con el método de la mayoría simple es que no es decisivo: para determinadas configuraciones de preferencias y ciertos conjuntos de alternativas puede dar lugar a relaciones sociales cíclicas, que conducen a conjuntos elegidos vacíos. Podemos proponer diversos criterios que suponen la superación, más o menos completa, de esta dificultad; por orden creciente de exigencia:

— Que por lo menos una alternativa resulte escogida en X; a dicha alternativa la llamaríamos de Condorcet.
— Que la relación social inducida sea acíclica.
— Que la relación social inducida sea transitiva.

En la actualidad se conocen varios tipos de restricciones que definen clases de configuraciones de preferencias para las cuales queda garantizado que se satisfarán estas distintas exigencias al aplicar sobre ellas el método de mayoría simple.

El primer tipo de restricciones que vamos a considerar imponen determinadas estructuras sobre las configuraciones de preferencias, exigiendo que ciertas combinaciones de preferencias individuales no puedan coexistir en una misma configuración.

Diremos que un individuo es activo ante un conjunto de alternativas si no es indiferente entre todas ellas. En las definiciones siguientes nos referimos siempre a los correspondientes conjuntos de individuos activos.

Restricción de valores (RV).—Una configuración de preferencias satisface esta restricción para una terna de alternativas (x, y, z) si existe alguna alternativa, por ejemplo x, acerca de la cual todos los individuos están de acuerdo en que no es la mejor, o no es la peor, o no es intermedia. Formalmente:

$$(\forall i)\ [xP_iy \vee xP_iz] \vee (\forall i)\ [yP_ix \vee zP_ix] \vee$$
$$\vee\ (\forall i)\ [(xP_iy\ \&\ xP_iz) \vee (yP_ix\ \&\ zP_ix)]$$

Restricción sobre extremos (RE).—Una configuración de preferencias satisface esta restricción para una terna de alternativas (x, y, z)

si, de existir algún individuo que prefiera x a y e y a z, todos aquellos individuos que prefieren z a x también prefieren z a y e y a x. Formalmente,

$$(\exists i)\ [xP_iy\ \&\ yP_iz] \rightarrow (\forall j)\ [zP_jx \rightarrow (zP_jy\ \&\ yP_jx)]$$

Acuerdo limitado (AL).—Una configuración de preferencias satisface esta restricción para una terna de alternativas si existen dos de ellas, x e y, tales que todos los individuos consideran que x es por lo menos tan deseable como y. Es decir, $(\forall i)\ xR_iy$.

Una condición es suficiente para evitar una anomalía del sistema de mayoría simple si dicha anomalía nunca se produce cuando el sistema se aplica sobre configuraciones de preferencias que la satisfacen. Es necesaria si cada violación de la condición da lugar a un conjunto de preferencias individuales en base a las cuales se pueda construir alguna configuración de preferencias para la cual el sistema produzca la anomalía en cuestión. Obsérvese que la noción de suficiencia aquí definida es la habitual, pero no la de necesidad. Que una condición sea necesaria, en el sentido aquí empleado, significa que es mínima, es decir, que no existe ninguna condición más débil que ella cuyo cumplimiento sea suficiente para evitar la anomalía de que se trate.

Los siguientes teoremas, que utilizan las condiciones anteriores, nos indican bajo qué circunstancias operará satisfactoriamente el método de mayoría simple.

Teorema 4.—Condición necesaria y suficiente para que una configuración de preferencias dé lugar a relaciones sociales acíclicas bajo el método de mayoría simple es que satisfaga por lo menos una de las tres restricciones *RV*, *RE* o *AL* para cada terna de alternativas.

Teorema 5.—Para una configuración de preferencias dada, y si un conjunto de alternativas contiene por lo menos tres que sean óptimas en el sentido de Pareto, condición necesaria y suficiente para que exista entre ellas una alternativa de Condorcet es que aquélla satisfaga la restricción *RE* o la *AL* para cada terna de alternativas.

Teorema 6.—Condición necesaria y suficiente para que una configuración de preferencias dé lugar a relaciones sociales transitivas bajo el método de mayoría simple es que satisfaga la condición *RE* para cada terna de alternativas.

Un segundo tipo de restricciones sobre configuraciones de preferencias —menos estudiado— impone condiciones sobre la proporción en que deben producirse los distintos puntos de vista individuales, sin que éstos se excluyan entre sí como en las del tipo anterior.

Dada una terna ordenada de alternativas (x, y, z) diremos que las preferencias

(a) $xPyPz$, (b) $yPzPx$, (c) $zPxPy$

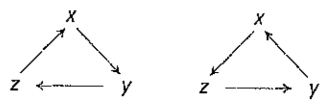
constituyen el *ciclo horario*, y que las

(d) $xPzPy$, (e) $yPxPz$, (f) $zPyPx$

forman el *ciclo contra horario*.

La figura *1* esclarece la motivación de estos términos:

Figura 1



El siguiente teorema nos permite, con la ayuda de las definiciones anteriores, establecer restricciones sobre configuraciones de preferencias bajo las cuales la relación social por mayoría simple será siempre transitiva.

Teorema 7.—Para cualquier configuración de preferencias tal que, para toda terna de alternativas (x, y, z), el número de preferencias sobre (x, y, z) que pertenezca al ciclo horario sea el mismo que el de las que pertenezca al contra horario, la relación social obtenida por mayoría simple será transitiva.

Las contribuciones al estudio de restricciones en el campo de definición bajo las cuales se evitan las anomalías en el comportamiento de la mayoría simple son muy abundantes. Los resultados presentados más arriba (teoremas 4, 5 y 6) se deben a Sen y Pattanaik [97], y son la culminación de un conjunto de trabajos inmediatamente anteriores: (Sen [91], Pattanaik [73], Inada [53]). Hay que destacar también que dichos resultados pueden extenderse también al caso de otras funciones, distintas de las de mayoría simple, que basen las relaciones sociales entre alternativas en comparaciones binarias de las posiciones que éstas ocupan en las preferencias individuales. Las restricciones expuestas son la expresión *definitiva de una línea de trabajo iniciada por Black [9], que ya en 1948 propuso un criterio, el de configuración de preferencias apuntadas («single-peaked»), que aún hoy sigue siendo el de mayor atractivo intuitivo. De hecho, la restricción propuesta por Black —y estudiada, entre otros, por Arrow [2]— constituye un caso particular de la que hemos llamado restricción de valores. Un trabajo interesante es el de Kaneko [55], porque en él se establecen condiciones análogas a las anteriores pero que son necesarias en el sentido matemático habitual.*

El teorema 7 se debe a Saposnik [87]. Una generalización de los resultados de Saposnik se encuentra en Gaertner y Heinecke [40].

Una línea de análisis concreta dentro del marco de las restricciones sobre configuraciones de preferencias se dedica a estudiar el caso particular en que las alternativas son vectores reales multidimensionales. La importancia del caso particular es evidente: comprende todas aquellas situaciones en que las variables de elección son los niveles cuantitativos o cuantificables en que se fijen distintas magnitudes socialmente relevantes (volumen de gasto en distintos bienes públicos, por ejemplo).

La posibilidad de obtener resultados más concretos que para el caso general se debe a la estructura adicional que adopta el problema: utilizando las distintas nociones de distancia entre vectores reales se hace posible hablar, por ejemplo, de lo alejada que se encuentra una alternativa de aquella que es óptima para un individuo. Y, bajo determinadas hipótesis acerca de las preferencias individuales, pueden establecerse relaciones entre dicha distancia y el nivel de satisfacción asociado con cada alternativa. Dentro de este marco, Kramer [62] ha podido establecer que las restricciones generales propuestas por Sen y Pattanaik se cumplirán solamente en casos excepcionales: basta con que, en algún punto, diverjan las relaciones marginales de sustitución de más de dos individuos para que aquellas restricciones queden violadas. Otros trabajos (Tullock [100], Plott [82], Davis, de Groot y Hinich [22], Wendell y Thorson [103]) estudian condiciones sobre la distribución de las distintas preferencias individuales bajo las cuales no se producirán anomalías al aplicar el método de mayoría simple o versiones modificadas de éste. En el mismo contexto se ha analizado el posible impacto del abstencionismo sobre el funcionamiento de la mayoría simple (Slutsky [98], Hinich, Ledyard y Ordeshook [51]).

Finalmente, debemos notar que muchos trabajos que toman como punto de partida la existencia de una función de bienestar social conocida, aluden como justificación a alguna hipótesis implícita que restrinja adecuadamente su campo de definición. Como ha señalado Kelly [57], este tipo de restricciones no son de ningún modo suficientes para justificar la práctica habitual de suponer que aquella función de bienestar es, además, continua, ni tan sólo bajo hipótesis de continuidad de las preferencias individuales.

7. Frecuencia de anomalías para la mayoría simple.

Las restricciones que acabamos de exponer nos permiten localizar ciertas clases de sociedades bajo las cuales el método de mayoría simple operaría satisfactoriamente. Las consecuencias de su estudio podrían resumirse así: si, directa o indirectamente, sabemos que una sociedad determinada pertenece a alguna de aquellas clases, podemos recomendar la toma de decisiones en su seno por mayoría simple, ya que a las virtudes de este método no se sumará en este caso su principal defecto, la falta de decisividad.

Pero, ¿es natural suponer que al diseñar un procedimiento de elección se cuente con información adecuada sobre las preferencias individuales? ¿Qué hacer si dicha información no resulta cierta? El enfoque que pasamos a exponer ahora responde a un punto de vista opuesto al anterior: en lugar de determinar condiciones bajo las cuales la mayoría simple produce resultados adecuados, se trataría de establecer la frecuencia con que podría conducir a situaciones anómalas. La motivación sería la siguiente: si estableciésemos que la frecuencia con que se producirán anomalías (número de configuraciones que generan anomalías/número total de configuraciones posibles) es baja, podríamos recomendar la utilización del método de mayoría simple, no porque supiéramos con certeza que iba a funcionar correctamente, sino porque la probabilidad de que no lo hiciere, dando lugar a elecciones vacías, sería pequeña. Obsérvese que esta interpretación sólo es válida si se identifican frecuencias con probabilidades: implícitamente, al suponer desconocidas las preferencias individuales, se trata a todas las configuraciones posibles como equiprobables. Sin esta hipótesis, de difícil justificación, resulta oscura la interpretación de los estudios que pasamos a comentar, basados en el cálculo de la frecuencia de anomalías.

Habiendo dejado constancia de las debilidades de este tipo de estudios, derivadas de su difícil interpretación, pasamos a exponer algunos de los resultados que han producido. En particular, aquellos que estudian cómo evoluciona la proporción de configuraciones que producen anomalías a medida que aumentan las dimensiones de una sociedad (el número de sus miembros o el de las alternativas abiertas ante ella).

Sea $P(N, M)$ la proporción de configuraciones para las que la relación social generada por la mayoría simple no es transitiva.

Teorema 8.—

(a) $P(N, M+1) > P(N, M)$ para $N \geqslant 3$, $M \geqslant 2$.

(b) Si $N \geqslant 1$ es impar, $P(N+1, M) > P(N, M)$ para $M \geqslant 3$.

(c) Si $N \geqslant 2$ es par, $P(N+1, M) < P(N, M)$ para $M \geqslant 3$.

(d) $P(N+2, M) > P(N, M)$ para $N \geqslant 0$, $M \geqslant 3$.

Es decir: para un número de individuos dado, la proporción de configuraciones bajo las cuales se viola la transitividad aumenta con el de alternativas (a). Su evolución respecto al número de individuos, para conjuntos fijos de alternativas, es algo más compleja: crece cuando el número de individuos pasa de impar a par (b), y disminuye cuando aquel pasa de par a impar (c). Pero, globalmente, la proporción de anomalías también va en aumento (d).

Por tanto, y con las reservas ya indicadas acerca de la interpretación de este tipo de resultados, vemos cómo las dificultades para lograr relaciones transitivas por mayoría simple no hacen sino agravarse a medida que crece la dimensión social.

El resultado anterior se debe a Kelly [58], quien también estudia la evolución en las proporciones de configuraciones que producen otros tipos de anomalías: violación de la casi-transitividad por parte de la relación social, y ausencia de alternativas de Condorcet. Su técnica de análisis recursiva no es la única con que se ha atacado el problema. Otros trabajos han calculado los valores exactos de las proporciones para casos en que el número de individuos y de alternativas es pequeño (Black [9], Guilbaud [48]). Otros han estimado aquellas proporciones mediante experimentos de muestreo para sociedades de dimensiones reducidas (Campbell y Tullock [21], Williamson y Sargent [102]).

Finalmente, otros autores han intentado derivar fórmulas explícitas para las proporciones de anomalías, siempre con resultados poco satisfactorios dada la complejidad de las fórmulas obtenidas, que hace muy difícil su tratamiento analítico (Garmen y Kamien [42], Niemi y Weisberg [72], De Meyer y Plott [23], Gehrlein y Fishburn [43]).

8. Liberalismo y eficiencia Paretiana.

Una condición que pocas veces se pone en cuestión, y que, en sus distintas versiones, suele imponerse sobre los métodos de elección, es la condición de Pareto, que puede verse como un requisito mínimo de eficiencia: en efecto, parece natural que, en aquellos casos en que todos los miembros de una sociedad coinciden en preferir una alternativa x a otra y, esta última sea rechazada como posible elección siempre que x sea posible. Por ello, cuando se plantean dificultades en el diseño de métodos de elección, suelen atribuirse a aquellas otras condiciones —decisividad, racionalidad y, sobre todo, como veremos, *I A I*— que parecen menos naturales que la de Pareto. En esta sección presentamos resultados que ponen de manifiesto, sin embargo, que incluso un requisito tan elemental como aquél juega un papel fundamental en la aparición de dificultades como las que hemos señalado. Estos resultados tienen pues, además del interés inherente al nuevo tipo de condiciones que introducen —las de liberalismo, que pasaremos a definir inmediatamente—, el que derivan de su carácter como advertencia de que incluso una condición tan aparentemente inocua como la de Pareto puede ser causa de graves dificultades para la existencia de mecanismos satisfactorios.

Empezaremos por introducir una nueva condición, de liberalismo, sobre funciones de agregación de preferencias. En un sentido genérico, un punto de vista liberal podría describirse como aquel en que se reconoce a cada individuo el derecho a decidir, en base a sus preferencias solamente, acerca de algunos aspectos de la realidad social que se consideran de su exclusiva incumbencia. Tales podrían ser, por ejemplo, el color de las paredes interiores de su casa, el modo como guisa sus alimentos, etc.... Recordando que la definición de alternativas es muy general, se dará el caso en que comprenda, como elementos diferenciados, características del tipo que acabamos de describir. Así, por ejemplo, dos alternativas distintas x e y, podrían distinguirse simplemente por el color que, en cada una de ellas, tuviesen las paredes de mi casa. Un postulado liberal establecería que, en tal caso la decisión social entre x e y debería guiarse exclusivamente por las preferencias del interesado —las mías en este caso— respecto a dichas alternativas. Quede claro que no por ello el individuo en cuestión se convertiría en dictador: nada se dice sobre su influencia en las elecciones entre alternativas z y w que, a diferencia de las x e y anteriores, supusieran estados sociales en que otros elementos relevantes, además de los de su exclusiva incumbencia, quedasen alterados. Formalmente:

Un método de agregación de preferencias s satisface la *condición de liberalismo* si para cada individuo existen por lo menos dos alternativas x e y sobre las cuales las preferencias del individuo i son decisivas. Es decir, si para todo $i \varepsilon I$ existen x e y tales que

$$xP_iy \rightarrow xPy \quad \& \quad yP_ix \rightarrow yPx$$

donde P es la relación social estricta derivada de s.

El siguiente teorema (que, de hecho, admite formulaciones aún más estrictas) apunta las dificultades antes señaladas, y marca la existencia de un conflicto entre la condición de liberalismo y la de unanimidad en el seno de las funciones de agregación de preferencias decisivas.

Teorema 9.—No existe ninguna función de agregación de preferencias decisiva que satisfaga simultáneamente las condiciones de Pareto y de liberalismo.

Como ya hemos dicho, una de las razones por las que el anterior resultado, debido a Sen [94], resulta interesante, es porque pone de relieve lo restrictivo que puede resultar imponer incluso una condición tan intuitivamente atractiva como la de Pareto sobre un procedimiento de elección. Con todo, su formulación de lo que sería una condición de liberalismo resulta discutible, y ha sido objeto de polémica por parte de diversos autores [15], [27], [45], [50], que proponen versiones alternativas de lo que sería un requisito liberal, algunas de las cuales siguen conduciendo a resultados de imposibilidad, mientras que otras se muestran compatibles con la de eficiencia Paretiana.

9. La dimensión social.

Hasta ahora hemos venido trabajando bajo una hipótesis que a nadie habrá sorprendido: que el número de individuos en la sociedad es finito. Sin embargo, en otros campos de la teoría económica, y en especial en la teoría del equilibrio general, se ha venido trabajando muy activamente, desde hace ya unos *15* años, en el estudio de sociedades de dimensión infinita. Dicho estudio se ha revelado muy enriquecedor para la teoría. No se trata, desde luego, de afirmar que ninguna sociedad real se ajuste exactamente a las especificaciones de un modelo con un número infinito de individuos. Sin embargo, dichos modelos constituyen un punto de partida fundamental para el estudio de fenómenos que se produzcan en sociedades grandes, desde una doble perspectiva. Por una parte, porque los resultados para sociedades infinitas podrían valer como aproximaciones a los que son de esperar para sociedades finitas pero con «muchos» miembros. Y, además, porque estos resultados, y la propia estructura del marco en que se obtienen, sugieren una estrategia para el estudio de las características de sociedades extensas. En efecto, al impulso de cuestiones de esta naturaleza se ha desarrollado un lenguaje teórico que permite hablar de secuencias de sociedades finitas que tienden a una infinita. Con este lenguaje es posible plantearse cuestiones del siguiente tipo: dado que cierta propiedad se cumpliría para sociedades infinitas, ¿es posible afirmar que se verá también satisfecha, al menos «aproximadamente», por sociedades finitas pero con un número «grande» de individuos? Las respuestas se formulan como teoremas que siguen la siguiente estructura: si S es una sociedad infinita que satisface la propiedad α y $S_1, S_2, S_3, \ldots$, es una secuencia de sociedades finitas que tiende a S, existe un N tal que, para todo $M_i > N$, las sociedades (finitas) S_{M_i} satisfarán la condición α «aproximadamente».

Con esta disgresión tan informal sólo hemos querido indicar que el estudio de sociedades infinitas, aunque carezca de todo «realismo», puede ser —y de hecho ha sido—, una actividad teórica muy fructífera. Pues bien, también algunas contribuciones a la teoría de la elección social han adoptado este punto de vista, y con resultados interesantes.

Antes de exponer algunos de estos resultados debemos, sin embargo, ampliar nuestro marco de definición de métodos de elección, para que nos permita englobar aquellos casos en que el número de individuos es infinito. En efecto, hasta ahora, hemos venido describiendo las características sociales por medio de elementos de $\mathfrak{R}^N$, a los que llamábamos configuraciones de preferencias. ¿Cómo describir la forma de las preferencias individuales en una sociedad infinita? Observemos una configuración de preferencias típica: es de la forma $(R_1, R_2, \ldots, R_N)$, donde para cada i ε $(1, 2, \ldots, N)$, interpretamos R_i como las preferencias del individuo i en una sociedad compuesta por N miembros. El vector $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ puede verse, pues, como una función v que a cada individuo i ε I le asigna las preferencias $v(\mathrm{i}) = R_i$ correspondientes a i. Esta interpretación nos permite generalizar fácilmente el concepto de configuración de preferencias.

Una configuración de preferencias para una sociedad cuyos miembros son elementos del conjunto I (que ahora podrá ser finito o infinito) vendrá dada por una función $v: I \to \mathfrak{R}$. Dada una configuración de preferencias v podremos conocer las preferencias de cualquier individuo i ε I calculando $v(\mathrm{i})$. Paralelamente, podemos redefinir un concepto más amplio de función de agregación de preferencias como sigue:

Dados dos conjuntos, X e I, una función de agregación de preferencias es una función $s: \mathcal{V} \to \mathfrak{R}$, donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de configuraciones de preferencias para la sociedad cuyos miembros son los elementos de I.

Análogamente, una función de bienestar social sería una función $w: \mathcal{V} \to \mathfrak{R}$.

Una de las posibilidades abiertas dentro de este marco más amplio es la reconsideración del Teorema de Imposibilidad de Arrow, como corolario del siguiente teorema.

Teorema 10.—Si $|X| > 2$, una función de bienestar social no dictatorial sólo puede ser IAI y P si está definida sobre una sociedad infinita. Para sociedades infinitas pueden existir funciones de bienestar social que satisfagan las propiedades anteriores simultáneamente (5).

Vemos, pues, que el teorema de imposibilidad de Arrow resultaría del anterior, al imponer la condición adicional que las sociedades para las que se aplica sean finitas. Pero la nueva formulación permite también descubrir que, en el límite (con infinitos individuos), podrían evitarse las dificultades que surgen cuando el número de individuos es finito. Cabría, entonces, preguntarse por la posibilidad que algún mecanismo pudiera satisfacer «aproximadamente» las propiedades Arrowianas cuando, aun siendo finita, la dimensión social fuese lo bastante grande. Dicha cuestión entraña, sin embargo, notables dificultades. Una de ellas es que, aunque sabemos que existan funciones de bienestar social satisfactorias para el caso infinito, desconocemos cuál es su forma. Otra, que debería establecerse con rigor qué se entiende por un cumplimiento «aproximado» de aquellas propiedades.

El teorema 10 se debe a Fishburn [29]. Una demostración alternativa la proporcionan Kirman y Sondermann [61], basándose en el estudio de la estructura que forman aquellos grupos de individuos que son decisivos: es decir, de aquellos que, de ponerse sus miembros de acuerdo, son capaces de determinar por sí solos cuáles sean las preferencias sociales. Del estudio de dicha estructura se deriva que, si se cumplen las condiciones de Arrow, existirá algún individuo que sea decisivo por sí solo: el dictador. No ocurre lo mismo cuando

(5) Por $|X|$ entendemos aquí el número de elementos contenidos en X.

la sociedad es infinita. Sin embargo, en tal caso, para toda función de bienestar Arrowiana existirán conjuntos de individuos, de dimensión arbitrariamente pequeña, que sean decisivos. Kirman y Sonderman hablan entonces de la existencia de un «dictador invisible».

10. Funciones de elección social. Coherencia y racionalidad.

Hasta aquí hemos venido considerando procedimientos de elección social bietápicos. En efecto, las funciones de agregación de preferencias parten de las preferencias individuales y dan lugar, en una primera fase, a relaciones binarias sociales. En base a éstas, y en una segunda etapa, determinan qué alternativas, entre las abiertas ante la sociedad en un momento dado, resultarán elegidas. En los últimos años se ha venido prestando una atención creciente a procedimientos distintos, que se diferencian de los anteriores en que, partiendo de las preferencias individuales y del subconjunto de alternativas entre las que se debe elegir, especifican directamente cuáles son las alternativas escogidas socialmente. La cuenta de Borda sobre $\mathfrak{X}$ (véase la Sección 2) es un ejemplo de tales funciones, que hemos definido formalmente en la Sección 3, y a las que llamamos de elección social.

Algunas de las propiedades que hemos venido exigiendo de las funciones de agregación de preferencias pueden adaptarse fácilmente al caso de las funciones de elección social. Así:

Una función de elección social f satisface la *condición de Pareto* si y sólo si, para cualquier configuración de preferencias $\mathbf{R} \varepsilon \mathfrak{R}^N$ y todo $Y \varepsilon \mathfrak{X}$

$$(\forall i)\ [xP_iz\ \&\ x \varepsilon Y\ \&\ z \varepsilon Y] \rightarrow z \notin f(Y, \mathbf{R})$$

Una función de elección social f es *independiente de alternativas irrelevantes* si y sólo si, para cualquier $R \varepsilon \mathfrak{R}^N$ y todo $Y \varepsilon \mathfrak{X}$,

$$(\forall i)\ (\forall z, w \ \varepsilon\ Y)\ [zR_iw \longleftrightarrow zR_i'w] \rightarrow [f(Y, \mathbf{R}) = f(Y, \mathbf{R}')]$$

Una función de elección social f es *dictatorial* si existe un individuo $i \varepsilon I$, el dictador, tal que, para todo $\mathbf{R} \varepsilon \mathfrak{R}^N$ y todo $Y \varepsilon \mathfrak{X}$

$$[x \varepsilon Y\ \&\ z \varepsilon Y\ \&\ xP_iz] \rightarrow z \notin f(Y, \mathbf{R})$$

Una función de elección social f es *decisiva* si $f(Y, \mathbf{R}) \neq \phi$ para todo $\mathbf{R}$ y cualquier $Y \neq \phi$.

Otros criterios surgen naturalmente, además, al considerar la relación entre las decisiones que una función de elección social f adopte para distintos subconjuntos de alternativas, si se mantienen fijas las preferencias individuales. Así, por ejemplo, podría parecer interesante que si una alternativa x resulta escogida por f entre los miembros de un $Y \subset X$, también lo sea cuando se trate de escoger entre subconjuntos de Y a los que x siga perteneciendo. O, por ejemplo, que si x resulta escogida en Z, y $w \varepsilon Z$ lo es en un subconjunto mayor de alternativas $H \supset Z$, también x lo sea en H. A requisitos de este tipo sobre las funciones de elección social las podríamos llamar de coherencia.

Muchos trabajos recientes se han ocupado de estudiar la posibilidad de diseñar funciones de elección social que, además de las correspondientes propiedades de tipo Arrowiano, sean capaces de satisfacer condiciones de coherencia determinadas.

Formalizaremos dos de ellas, las que acabamos de describir verbalmente.

Una función de elección social es *coherente ante contracciones* del conjunto de alternativas factibles si, para todo $\mathbf{R} \varepsilon \mathfrak{R}^N$ y cualquier $Y \varepsilon \mathfrak{X}$,

$$[x \varepsilon f(Y, \mathbf{R})\ \&\ x \varepsilon Z \subset Y] \rightarrow x \varepsilon f(Z, \mathbf{R})$$

Una función de elección social es *coherente ante expansiones* del conjunto de alternativas si, para todo $R \varepsilon \mathfrak{R}^N$ y cualquier $Z \varepsilon \mathfrak{X}$,

$$[x \varepsilon f(Z, \mathbf{R})\ \&\ Z \subset H\ \&\ z \varepsilon f(H, \mathbf{R})\ \&\ z \varepsilon Z] \rightarrow x \varepsilon f(H, \mathbf{R})$$

También el cumplimiento de condiciones de coherencia puede dar lugar a dificultades similares a las expuestas por teoremas como los de Arrow o Mas Colell y Sonnenschein. Baste aquí señalar que la cuenta de Borda sobre $\mathfrak{X}$, que satisface las correspondientes condiciones de IAI y P, no satisface ninguna de las dos propiedades de coherencia que acabamos de describir.

Que también las funciones de elección social planteen problemas de diseño no es de extrañar si observamos que existen fuertes conexiones entre ellas y las funciones de agregación de preferencias. Por una parte, toda función de agregación de preferencias genera, como resultado de sus dos etapas (agregación y elección en base a la relación social) una de elección social. En dirección contraria, existen funciones de elección social —aunque no todas— que conducen a resultados que hubiesen podido lograrse a través de alguna función de agregación de preferencias. Diremos de ellas que son racionalizables. Formalmente:

Una función de elección social f es *racionalizable* si existe una función de agregación de preferencias s tal que, para todo $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^N$ y todo $Y \in \mathcal{X}$, se cumple que $f(Y, \mathbf{R}) = C(Y, s(\mathbf{R}))$. En tal caso, diremos que s racionaliza a f.

Pues bien, algunas de las dificultades en el diseño de funciones de elección social satisfactorias pueden explicarse por el hecho que determinadas condiciones de coherencia exigen que las funciones de elección social que las satisfagan sean racionalizables, y, por tanto, incurran en problemas análogos a aquellos con que tropiezan las funciones de agregación de preferencias.

Pero existen problemas más profundos: incluso bajo condiciones débiles de coherencia, que pueden verse satisfechas por funciones de elección no racionalizables, sigue siendo posible obtener teoremas de imposibilidad.

Una revisión reciente de la literatura que se ocupa de estos temas, con abundantes referencias bibliográficas, se encuentra en Sen [96]. Plott [83], Sen [92] y Fishburn [33], entre otros, han propuesto distintas restricciones de coherencia sobre funciones de elección, y estudiado las dificultades que se plantean al intentar compatibilizarlas con las de Pareto e Independencia de Alternativas Irrelevantes. Acaso el resultado negativo que utiliza una condición de coherencia más débil sea el de Blair, Bordes, Kelly y Suzumura [11].

Una postura consecuente con la formulación aquí considerada consiste en describir el comportamiento individual, al igual que el colectivo, por medio de funciones de elección que satisfagan ciertos requisitos mínimos de coherencia, sin apelar directamente a relaciones binarias sobre el conjunto de alternativas.

También bajo formulaciones de este tipo se mantienen dificultades análogas: véase Brown [18] y Kelly [59].

El problema de la racionalidad de las decisiones ha sido también estudiado en la literatura sobre la conducta del consumidor individual. Véase Arrow [1] y Richter [85].

11. Independencia de alternativas irrelevantes.

Durante muchos años se ha visto en la condición de *I A I* la responsable de las dificultades en el diseño de mecanismos satisfactorios de elección social. No es de extrañar, pues, que dicha condición haya sido objeto de estudio desde ángulos diversos: se ha tratado, por una parte, de analizar su significado y consecuencias, para establecer la conveniencia o no de adoptarla como criterio de valoración; y, por otra parte, se han estudiado procedimientos distintos a los inicialmente propuestos por Arrow, unos capaces de conservar la propiedad de *I A I* a costa de otras, otros capaces de mantener condiciones alternativas a partir de violar la de *I A I*.

En primer lugar, obsérvese que tanto en el Teorema de Arrow como en los de Mas Colell y Sonnenschein, la condición de *I A I* se encuentra en contradicción con otras que resultan, a nivel intuitivo, casi incuestionables. Su abandono, como vía de superación de las incompatibilidades encontradas, aparece como un camino muy natural. Un modo de hacerlo, por ejemplo, es atendiendo a las propiedades cardinales de las preferencias individuales —teniendo en cuenta, pues, no sólo el orden sino también las intensidades relativas con que los individuos valoran las distintas alternativas. No es necesario ir tan lejos: procedimientos como la cuenta de Borda sobre X, que atienden solamente a las características ordinales de las preferencias, son capaces de satisfacer los demás requisitos Arrowianos violando el de *I A I*.

Pero, antes de aceptar como incuestionable esta vía de superación de las dificultades, consideremos las distintas justificaciones posibles de la condición de *I A I*. En primer lugar, señalemos que algunos de los argumentos propuestos en su defensa —incluso por el propio Arrow— son radicalmente incorrectos y provienen de una confusión con determinados requisitos de coherencia (como los descritos para funciones de elección social en el apartado anterior). Pero otros son muy relevantes. Tradicionalmente, se ha tratado a la condición de *I A I* como garantía para evitar comparaciones inter o intra-personales de utilidad. No está claro que baste con garantizarla para eludir estos tipos de comparación. Más directo parece otro argumento en favor de la condición, que apela a las dificultades técnicas con que podría tropezar un mecanismo que no la cumpliese. Si una función de bienestar social w, por ejemplo, no fuese *I A I*, las elecciones que determinase para ciertos conjuntos de alternativas posibles dependerían de las preferencias individuales con respecto a otras que, siendo concebibles, no entrasen en el campo de posibilidades sociales. Ello plantearía importantes problemas de concreción ¿Qué alternativas deben influir sobre la elección social aun cuando no sean posibles, y cuáles no deben ser tenidas en cuenta? Si dejamos que la elección social dependa del horizonte de alternativas concebibles, más allá de las que sean factibles, introduciremos un factor determinante y difícilmente controlable sobre sus resultados. Este tipo de argumentos parece haber llevado a muchos autores a considerar que la *I A I* es un requisito indispensable para que un mecanismo de elección social esté bien definido. En particular, esta postura viene favorecida por el hecho que la adaptación de dicha condición al contexto de las funciones de elección social permite comprobar que es posible mantenerla, junto con la decisividad y eficacia Paretiana, en el seno de funciones no dictatoriales, con tal que renunciemos a que sea racionalizable. Y, en tal caso, acaso sea esta propiedad la que deba ser desechada, puesto que la referencia a unas hipotéticas «preferencias sociales» no es indispensable para establecer reglas de elección colectivas.

Vickrey [101] discute las posibilidades que abre y las dificultades que plantea la consideración de las características cardinales de las preferencias individuales como base de elecciones colectivas. Entre los partidarios de considerarlas se cuentan Sen [92] [96] y Segura [90]. En un marco más amplio —en que el tiempo y la incertidumbre juegan un papel explícito (véase la Sección 12)— también Camacho [19] propugna el uso de índices cardinales de utilidad.

Para puntos de vista favorables al mantenimiento de la condición de I A I, véase Arrow [2] [3] y Fishburn [33]. La condición de I A I puede formularse de distintos modos, más o menos restrictivos. Los trabajos de Hansson [49], Mayston [70], Pattanaik [78] y Blau [13], entre otros, presentan distintas formalizaciones de la condición y discuten sus méritos relativos. Algunas confusiones que se han producido históricamente acerca del significado de la condición son objeto de estudio en Hansson [49], Karni y Schmeidler [56], Ray [84] y Barberá [6].

12. Otros modelos alternativos.

Las funciones de agregación de preferencias y las de elección social no son sino modelos concretos que intentan recoger algunos rasgos fundamentales de los procesos de elección colectivos. No es de extrañar, pues, que se hayan propuesto y estudiado recientemente otros modelos alternativos que formalizan distintos aspectos relevantes de dichos procesos.

En primer lugar, obsérvese que todas las funciones de elección social consideradas hasta ahora tienen un carácter determinista: cada alternativa resulta o no escogida, para cada situación determinada. Otra formulación distinta que está siendo objeto de interés creciente establecería que, en base a las preferencias individuales, lo que se determina son las probabilidades —mayores o menores— con que vaya a resultar elegida cada alternativa. El azar, combinándose con las características individuales, contribuiría así decisivamente a la determinación de las elecciones colectivas.

Llamaremos loterías a las distribuciones de probabilidad sobre X. Sea L el conjunto de las loterías sobre X, y l un elemento genérico en L. Para cada l dado, $l(x)$ será la probabilidad con que obtendríamos la alternativa x.

Una función probabilística de decisión sería entonces una función $h: \mathfrak{R}^N \to L$. Dada una configuración de preferencias $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$, $h(\mathbf{R}) = l$ nos indicaría la probabilidad con que la sociedad descrita por $\mathbf{R}$ escogerá cada alternativa en X.

La introducción explícita de loterías como criterios de elección social se debe a Zeckhauser [107], quien estudió las posibilidades que esta formulación ofrece para la superación de los problemas de intransitividad para la mayoría simple. Otros modelos de elección mediante loterías (que consideran preferencias individuales más complejas que las descritas mediante relaciones de orden), son los de Intriligator [54], Fishburn [31] [33], Fishburn y Gehrlein [39] y Zeckhauser [108].

En segundo lugar, nótese que las formulaciones hasta ahora consideradas tienen un carácter eminentemente estático. Cierto es que las alternativas admiten ser reinterpretadas como secuencias temporales de acciones, y que cabe, por tanto, introducir consideraciones dinámicas en el marco de las funciones de agregación de preferencias o en las de elección. Pero algunos trabajos se han orientado hacia la formalización más explícita de los procedimientos de elección colectivos en un marco temporal, como métodos que permitan adoptar secuencias de acciones, a lo largo de períodos distintos, atendiendo a las variaciones que pueden producirse con el paso del tiempo en las condiciones del entorno.

El esfuerzo más logrado en esta dirección se debe a Camacho [19]. Este considera el caso de una sociedad que debe adoptar secuencias de acciones, sobre cuyos resultados los individuos tienen preferencias que varían con las circunstancias que se den en cada período, circunstancias que dependen de factores aleatorios. En este marco, una decisión social es una secuencia de acciones, y un procedimiento de decisión es una regla que, dadas las preferencias individuales, nos permita determinar una acción para cada período, en función de las circunstancias que concurran en él.

Camacho demuestra la posibilidad de representar las preferencias individuales mediante funciones de utilidad con propiedades cardinales (bajo hipótesis razonables sobre dichas preferencias), y describe una clase de funciones que dan lugar a secuencias eficientes de acciones cuando operan sobre aquellas funciones de utilidad.

Otros tratamientos dinámicos se deben fundamentalmente a tratadistas de Ciencia Política. Véase, por ejemplo, Kramer [63].

13. **Estrategia y elección social.**

Hasta este punto nos hemos referido a trabajos en que, tras proponerse como deseables ciertas propiedades de los métodos de elección, se discuten las circunstancias bajo las que determinados procedimientos o clases de éstos son capaces de satisfacerlas. Dichas propiedades, en general, ponen en relación las características de las preferencias individuales con las de aquellas elecciones a las que dan lugar. Se presume que un procedimiento será adecuado si es capaz de «tener en cuenta» las opiniones de los miembros de una sociedad, y que dicha capacidad quedará reflejada en la medida en que satisfaga propiedades de aquel tipo. Consideremos ahora una cuestión algo distinta. Supongamos, por un momento, que dispusiéramos de un mecanismo de elección satisfactorio, es decir, que —al reunir determinadas propiedades preestablecidas— fuese capaz de establecer relaciones adecuadas, a nuestro juicio, entre las preferencias individuales y las elecciones sociales. Enfrentados a un problema concreto de elección, de poco nos serviría disponer de aquel mecanismo si no conociésemos las preferencias de los distintos individuos. ¿Cuáles podrían ser las fuentes de información acerca de aquéllas? Claramente, dado su carácter subjetivo, la única fuente posible la constituyen los propios individuos que las detentan.

Habría, pues, que conseguir que los individuos diesen a conocer sus preferencias para poder tomar decisiones colectivas adecuadas. Esta revelación individual de preferencias podrá manifestarse directamente —como en el caso de votaciones políticas— o indirectamente —como en el caso de procedimientos de mercado, donde vienen expresadas a través de las decisiones individuales de oferta y demanda—. En cualquier caso, esta distinción se desvanece al nivel formal en que trabajamos ahora. Del mismo modo, tampoco es necesario distinguir los casos en que el mecanismo opera sobre la totalidad de las características individuales (caso de la mayoría simple o la cuenta de Borda) de aquellos que sólo procesan aspectos parciales de aquéllas (como, por ejemplo, cuando cada individuo vota sólo por su alternativa preferida).

¿Qué ocurriría si los individuos decidiesen no proporcionar información sobre sus preferencias, o proporcionar información falsa? Claramente, el mecanismo de elección, por satisfactorio que fuese «a priori», se encontraría con dificultades. En el primer caso —abstenciones— porque no dispondría de los datos básicos que necesita para operar. En el segundo —revelación incorrecta de preferencias— porque los resultados obtenidos, que seguirían guardando una relación aparentemente «correcta» con los datos disponibles (gracias a las propiedades formales del método) habrían perdido su conexión con las verdaderas características de entorno social.

Ambos tipos de dificultades han sido estudiados en la literatura. El primero —abstencionismo— es objeto de interés muy especial para los autores que se interesan por mecanismos de tipo político (véanse referencias en la Sección 6). Ahora vamos a concentrarnos en el segundo tipo de problema. Hemos dicho que, si los individuos dejan de proporcionar información correcta acerca de sus preferencias, la relación entre éstas y las decisiones colectivas resultantes de la aplicación de un método de elección social quedaría oscurecida. Pero, podríamos preguntarnos, ¿qué razones podría tener un individuo para revelar incorrectamente sus preferencias? Porque, de no tenerlas, poco deben preocuparnos las consecuencias de sus eventuales desviaciones. Esto nos conduce al tipo de cuestión concreta que se ha planteado la teoría: suponiendo, como es habitual, que los individuos actúan para maximizar su satisfacción, ¿bajo qué condiciones tendrían incentivos para revelar sus preferencias correctamente?

Si tratamos el acto de revelar las propias preferencias como una variable de decisión del individuo, se trata de investigar bajo qué condiciones resultará óptimo para éste expresar aquellas que realmente detenta.

Los ejemplos de situaciones bajo las cuales algunos individuos podrían decidir revelar preferencias distintas a las suyas son abundantes. Así, por ejemplo, en las elecciones donde cada individuo puede votar por una sola alternativa y vence la que obtiene mayor número de votos. Si existen tres candidatos, dos de ellos mayoritarios y uno claramente minoritario, los partidarios de este último podrían decidir apoyar a aquel otro, mayoritario, que más prefieran, en lugar de «malgastar» su voto en favor de un individuo sin posibilidades. Formalmente, ello equivaldría a revelar sus preferencias incorrectamente. Dado, pues, que éste y otros procedimientos habituales no siempre proporcionan incentivos adecuados para que los individuos contribuyan con sus verdaderas preferencias a la formación de decisiones colectivas, podemos preguntarnos por la existencia de algún método capaz de inducirles siempre a revelarlas correctamente.

Nos limitaremos a formalizar y resolver esta cuestión en el contexto, muy sencillo, de las funciones (que llamaremos de votación) que a cada configuración de preferencias le asignan una alternativa escogida, y sólo una. Formalmente,

Una función de votación es una función $h\colon \mathfrak{R}^N \to X$.

Trataremos ahora de formalizar las condiciones bajo las cuales podríamos decir que existen incentivos para que un individuo revele correctamente sus preferencias bajo una función de votación. Para ello resulta conveniente empezar por considerar un caso en el que no se diesen tales incentivos. Partamos, para ello, de dos configuraciones de preferencias **R** y **R**′ que difieran sólo en una componente, la i-ésima. Es decir,

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_{i-1}, R_i, R_{i+1}, \ldots, R_{N-1}, R_N)$$
$$\mathbf{R}' = (R_1, R_2, \ldots, R_{i-1}, R_i', R_{i+1}, \ldots, R_{N-1}, R_N)$$

Supongamos que $h(\mathbf{R}) = x$, $h(\mathbf{R}') = y$, y que yP_ix, siendo P_i la relación estricta de preferencias asociada con R_i. Supongamos que **R** fuese la configuración correspondiente a las verdaderas preferencias de los miembros de una sociedad. En tal caso, el i-ésimo individuo podría advertir que si revelase sus preferencias incorrectamente, declarando detentar las R'_i en lugar de las R_i, sería capaz de obtener un resultado social, *y*, que prefiere estrictamente al que obtendría, *x*, de seguir las «reglas del juego» y manifestar sus verdaderas preferencias. En tal caso, podríamos decir, el individuo está en posición de manipular en su favor, revelando incorrectamente sus preferencias, los resultados del método de votación *h*. Este tipo de situación correspondería, pues, a casos en que no existen incentivos para que los individuos contribuyan con sus verdaderas preferencias a la formación de las decisiones colectivas. La siguiente condición formaliza lo que acabamos de decir.

Un método de votación *h* es *manipulable* si existen dos configuraciones de preferencias **R** y **R**′ tales que

1) Para algún $i \in I$, $R_i \neq R_i'$.
2) Para todo $j \neq i$, $R_j = R_j'$, y
3) $h(\mathbf{R}')\, P_i\, h(\mathbf{R})$

Nuestra pregunta fundamental es, ahora, la siguiente: ¿existen funciones de votación satisfactorias que no sean manipulables? Para responder a esta cuestión, conviene definir una clase de funciones de votación que, aunque no son manipulables por razones obvias, resultan totalmente insatisfactorias.

Una función de votación h es *dictatorial* si existe un individuo $i \varepsilon I$ tal que, para cualquier configuración de preferencias **R**,

$$h(\mathbf{R}) \varepsilon C(X, R_i)$$

Al individuo i le llamamos, en tal caso, un dictador. La función de votación es, pues, dictatorial, si sus resultados dependen exclusivamente de la voluntad de un individuo. Claramente, tales métodos no son manipulables, por cuanto el dictador estará siempre satisfecho de sus resultados y ningún otro individuo será capaz de influir sobre ellos sean cuales sean las preferencias que revele. Cabe preguntarse, entonces, reformulando la cuestión anterior, lo siguiente: ¿existen funciones de votación que no sean dictatoriales ni manipulables? La respuesta, como veremos, es totalmente negativa.

Teorema 11.—Si el número de alternativas es mayor que dos, toda función de votación es o bien dictatorial o manipulable.

El resultado anterior fue obtenido independientemente por Gibbard [44] *y Satterthwaite* [88]. *Una demostración concisa se debe a Schmeidler y Sonnenschein* [89]. *Los primeros estudios sobre revelación incorrecta de preferencias se preocuparon de determinar restricciones en el campo de definición de los procedimientos (análogos a los considerados en la Sección 6) bajo los cuales podrían evitarse los fenómenos de manipulación. A este enfoque responden las obras de Farquharson* [26] *y Dummet y Farquharson* [24]. *Fenómenos similares al estudiado por Gibbard y Satterthwaite en el caso de funciones de votación se producen también para las funciones de agregación de preferencias. Sobre este tema, véanse Vickrey* [101], *Murakami* [71], *Sen* [92], *Pattanaik* [75], [76] [77] *y Barberá* [5]. *En estos trabajos queda de manifiesto el papel fundamental que juegan las distintas condiciones de Arrow para evitar que un procedimiento de elección pueda ser manipulado. Subyacente al concepto de manipulación de preferencias se encuentra alguna noción de equilibrio para el juego en que los individuos considerarían a sus preferencias reveladas como estrategias. Los anteriores trabajos exigen que revelar correctamente las funciones conduzca a un equilibrio de Nash. Otro enfoque, en que sólo se exige que existan equilibrios de Nash, sin exigir que coincidan con la relación de preferencias verdaderas, lo han adoptado Dutta y Pattanaik* [25], *Pattanaik* [81] *y Blin y Satterthwaite* [17]. *En otra serie de artículos, Pattanaik* [79] [80], *introduce conceptos de equilibrio distintos al de Nash.*

Finalmente, existen algunos procedimientos de elección probabilísticos (véase Sección 12), que no son manipulables. Dichos procedimientos han sido estudiados por Zeckhauser [108] *y caracterizados por Gibbard* [46]. *Algunos de ellos resultan bastante satisfactorios (Barberá* [7]*). Sin embargo, para que lo sean es necesario que el azar juegue un papel importante en el funcionamiento del mecanismo (Barberá* [4]*).*

14. Caracterización de clases de mecanismos.

La mayor parte de los resultados que hemos mencionado hasta ahora tienen un carácter negativo, al señalar la incompatibilidad de determinados conjuntos de condiciones deseables. Debemos ahora ocuparnos de otros trabajos cuyas conclusiones son más positivas: aquellos que caracterizan procedimientos concretos, o clases de ellos, en términos de las propiedades que satisfacen. Dado un procedimiento determinado, pueden establecerse aquellas propiedades que cumple. Pero, podríamos preguntarnos, ¿agota la adopción de dicho método las posibilidades de ver satisfechas aquellas propiedades, o acaso existen otros que también las reúnen? Un modo de responder totalmente a esta pregunta es mediante teoremas que, dada una clase o procedimiento específicos, establezcan condiciones que todos los miembros de la clase, y sólo ellos, satisfagan. En este caso diremos que dichas condiciones caracterizan a la clase en cuestión. Veamos, por ejemplo, el caso de la mayoría simple. Es fácil comprobar que, además de las condiciones de *I A I*, *P*, y respuesta positiva dicho procedimiento reúne también las de:

Anonimidad: La relación social entre alternativas no varía si permutamos el orden que ocupan las distintas relaciones de preferencias en una configuración. En otros términos, las preferencias sociales no dependen de cuáles son los individuos que las detentan.

Neutralidad: Si, dada una configuración de preferencias, permutamos las posiciones de dos alternativas x e y en las relaciones de preferencias de cada individuo, sin alterar las posiciones de las demás alternativas, quedarán permutados los papeles que jueguen x e y en la relación social. Dicho de otro modo: la posición de las alternativas en el orden social depende de su posición en las relaciones individuales de preferencias, pero no de su naturaleza concreta.

Pues bien, no sólo el método de mayoría simple reúne estas propiedades, sino que es la única función de agregación de preferencias que las cumple simultáneamente. Formalmente:

Teorema 12.—Una función de agregación de preferencias satisface las condiciones de Pareto, neutralidad, anonimidad, respuesta positiva e independencia de alternativas irrelevantes si y sólo si es el método de mayoría simple.

Este resultado se debe a May [68], que en un trabajo posterior demostró que las distintas condiciones citadas son independientes entre sí (May [69]). Se han dedicado muchos esfuerzos a la caracterización de procedimientos secuenciales de decisión colectiva, definidos para el caso en que se enfrentan sólo dos alternativas. Los principales trabajos se deben a Murakami [71] y Fishburn [30] [35] [38]. Recientemente se ha producido un renovado interés por las funciones basadas en votación por puntos (generalizaciones del procedimiento de Borda descrito en la Sección 2); véase Gärdenfors [41], Fishburn [32] [33], Smith [99] y Young [105] [106].

CONCLUSION

La literatura sobre elección social ha venido creciendo a ritmos acelerados. Lo que empezó siendo un enfoque concreto dentro del campo de la Teoría del Bienestar se ha ido constituyendo en un área de investigación autónoma, que genera sus propios problemas, de cuya solución se ocupa un grupo creciente de especialistas. De entre los distintos tipos de cuestiones que hemos apuntado en las páginas anteriores, señalaríamos como aquellos que ofrecen mayor promesa de desarrollo en el futuro inmediato —a sabiendas que en eso son inevitables los prejuicios y deformaciones personales— las que se refieren a formulaciones alternativas de los procesos de elección (Sección 12), restricciones en el campo de definición de distintos procedimientos (Sección 6) e introducción de consideraciones estratégicas en el comportamiento individual (Sección 13).

Para terminar, hay que reconocer que, junto a las ventajas indudables que representa para un área de investigación el logro de una relativa autonomía, también supone cierto riesgo. Concretamente, la teoría de la elección social corre el peligro de apartarse excesivamente del cuerpo de la teoría económica, por mucho que su problemática inicial (valoración de estados económicos alternativos, establecimiento de funciones objetivo para problemas de decisión, etc....) sea de indudable relevancia. Confiemos, sin embargo, que los desarrollos futuros en las áreas señaladas, junto con el control de la profesión —vitalmente interesada en la resolución de los problemas que quedan planteados— sean capaces de orientar a la teoría en direcciones fructíferas.

BIBLIOGRAFIA (*)

1. ARROW, K., «Rational choice functions and orderings», *Economica*, 26. 1959.
2. ———, *Social choice and individual values*, 2.ª edición, Yale University Press, New Haven, 1963. Existe traducción al castellano, editada por el Instituto de Estudios Fiscales.
3. ———, «General economic equilibrium: purpose, analytic techniques, collective choice», *American Economic Review*, 64. 1974.

(*) Este trabajo terminó de redactarse en mayo de 1976. Desde entonces han seguido apareciendo nuevas contribuciones a la teoría, que no intentaremos reseñar. Parece obligado, sin embargo, referirse a dos artículos de revisión que, desde puntos de vista distintos, se ocupan de los mismos temas que el nuestro:

— MUELLER, D. C., «Public Choice: a survey», *The Journal of Economic Literature, 14,* junio 1976.

— PLOTT, C. R., «Axiomatic social choice theory: an overview and interpretation», *American Journal of Political Science, XX,* agosto 1976.

4. BARBERA, S., «On the manipulability of social choice mechanisms that do not leave "too much" to chance», presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975. A aparecer en *Econometrica*.
5. ———, «Manipulation of Social Decision Functions», a aparecer en *Journal of Economic Theory*.
6. ———, «Racionalidad, decisividad e independencia de alternativas irrelevantes», a aparecer en *Cuadernos de Economía*.
7. ———, «A characterization of some classes of decision schemes», presentado al Simposium sobre «Decision Theory and Social Ethics», de la Academia Bávara de Ciencias, Schloss Reisensburg, R. F. A., junio 1976.
8. BERGSON, A., «On the concept of social welfare», *Quarterly Journal of Economics*, 68. 1954.
9. BLACK, D., «On the rationale of group decision-making», *Journal of Political Economy*, 56. 1948. Traducido en la Sección de Documentos de este mismo número de *H. P. E.*
10. ———, *The theory of committees and elections*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
11. BLAIR, D., G. BORDES, J. KELLY y K. SUZUMURA, «Impossibility theorems without collective rationality», *Journal of Economic Theory*, 11, 1976.
12. BLAU, J., «The existence of a social welfare function», *Econometrica*, 25. 1957.
13. ———, «Arrow's theorem with weak independence», *Economica*, 38. 1971.
14. ———, «A direct proof of Arrow's theorem», *Econometrica*, 40. 1972.
15. ———, «Liberal values and independence», *Review of Economic Studies*, 42. 1975.
16. BLAU, J. y DEB, R., «Social decision functions and the right of veto», a aparecer en *Econometrica*.
17. BLIN, J. y SATTERTHWAITE, M., «An impossibility theorem for deterministic organizations», presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975.
18. BROWN, D., «Acyclic aggregation over a finite set of alternatives», a aparecer en *Review of Economic Studies*.
19. CAMACHO, A., «Societies and social decision functions», en Leinfellner y Köhler, editores, *Developments in the methodology of social science*, Reidel, Dordrecht, 1974.
20. CAMPBELL, D., «Democratic preference functions», *Journal of Economic Theory*, 12. 1976.
21. CAMPBELL, C. y TULLOCK, G., «A measure of the importance of cyclical majorities», *Economic Journal*, 75. 1965.
22. DAVIS, O., De GROOT, M. y HINICH, M., «Social preference orderings and majority rule», *Econometrica*, 41. 1972.
23. DE MEYER, F. y PLOTT, C., «The probability of a cyclical majority», *Econometrica*, 38. 1970.
24. DUMMET, M. y FARQUHARSON, R., «Stability in Voting», *Econometrica*, 29. 1961.
25. DUTTA, B. y PATTANAIK, P., «On nicely consistent voting schemes», Discussion Paper 3/76. La Trobe University, 1976.
26. FARQUHARSON, R., *Theory of Voting*, Yale University Press, New Haven, 1969.
27. FARREL, M., «Liberalism in the theory of social choice», *Review of Economic Studies*, 43. 1976.
28. FISHBURN, P., «Intransitive indifference in preference theory: a survey», *Operations Research*, 18. 1970.
29. ———, «Arrow's impossibility theorem: concise proof and infinite voters», *Journal of Economic Theory*, 2. 1970.
30. ———, «The theory of representative majority decision», *Econometrica*, 39. 1971.
31. ———, «Lotteries and social choices», *Journal of Economic Theory*, 5. 1972.
32. ———, «Summation social choice functions», *Econometrica*, 41. 1973.
33. ———, *The theory of social choice*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
34. ———, «On collective rationality and a generalized impossibility theorem», *Review of Economic Studies*, 41. 1974.
35. ———, «Social choice functions», *SIAM Review*, 16. 1974.
36. ———, «Subset choice conditions and the computation of social choice sets», *Quarterly Journal of Economics*, 88. 1974.
37. ———, «A probabilistic model of social choice: comment», *Review of Economic Studies*, 42. 1975.
38. ———, «Three-valued representative systems», *Mathematical Systems Theory*, 9. 1975.
39. FISHBURN, P. y GEHRLEIN, W., «Election by chance in a world of uncertain voters», presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975.
40. GAERTNER, W. y HEINECKE, A., «Cyclically mixed preferences: a necessary and sufficient condition for transitivity of the social preference relation», presentado al Simposium sobre «Decision theory and social ethics», de la Academia Bávara de Ciencias /Schloss Reisensburg, R. F. A., junio 1976.
41. GÄRDENFORS, P., «Positionalist voting functions», *Theory and Decision*, 4. 1973.
42. GARMEN, M. y KAMIEN, M., «The paradox of voting: probability calculations», *Behavioral Science*, 13. 1968.
43. GEHRLEIN, W. y FISHBURN, P., «The probability of the paradox of voting: a computable solution», a aparecer en *Journal of Economic Theory*.
44. GIBBARD, A., «Manipulation of voting schemes: a general result», *Econometrica*, 41. 1973. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*
45. ———, «A Pareto-consistent libertarian claim», *Journal of Economic Theory*, 7. 1974.
46. ———, «Manipulation of schemes that mix voting with chance», *Discussion Paper*, 75, The

Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, 1976. A aparecer en *Econometrica*.

47. GUHA, A., «Neutrality, monotonicity and the right of veto», *Econometrica*, 40. 1972.

48. GUILBAUD, G., «Les théories de l'interêt général et le problème logique de l'aggrégation», *Economie Appliquée*, 5. 1952.

49. HANSSON, B., «The independence condition in the theory of social choice», *Theory and Decision*, 4. 1973.

50. HILLINGER, C. y LAPHAM, V., «The impossibility of a Paretian liberal: comment by two who are unreconstructed», *Journal of Political Economy*, 79. 1971.

51. HINICH, M., LEDYARD, J. y ORDESHOOK, P., «Nonvoting and the existence of equilibrium under majority rule», *Journal of Economic Theory*, 4. 1972.

52. HURWICZ, L., «The design of mechanisms for resource allocation», *American Economic Review*, 63. 1973.

53. INADA, K., «On the simple majority decision rule», *Econometrica*, 36. 1969.

54. INTRILIGATOR, M., «A probabilistic model of social choice», *Review of Economic Studies*, 40. 1973.

55. KANEKO, M., «Necessary and sufficient conditions for transitivity in voting theory», *Journal of Economic Theory*, 11. 1975.

56. KARNI, E. y SCHMEIDLER, D., «Independence of nonfeasible alternatives and independence of nonoptimal alternatives», presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975.

57. KELLY, J., «The continuous representation of a social preference ordering», *Econometrica*, 39. 1971.

58. ———, «Voting anomalies, the number of voters and the number of alternatives», *Econometrica*, 42. 1974.

59. ———, «Social choice from individual choices», mimeo, 1976.

60. KEMP, M., «Arrow's general possibility theorem», *Review of Economic Studies*, 21. 1953-54.

61. KIRMAN, A. y SONDERMANN, D., «Arrow's theorem, many agents and invisible dictators», *Journal of Economic Theory*, 5. 1972.

62. KRAMER, G., «On a class of equilibrium conditions for majority rule», *Econometrica*, 41. 1973.

63. ———, «A dynamical model of political equilibrium», *Cowless Foundation Discussion Paper*, 396. 1975.

64. LITTLE, J., «Social choice and individual values», *Journal of Political Economy*, 60. 1952.

65. MAS COLELL, A. y SONNENSCHEIN, H., «General possibility theorems for group decisions», *Review of Economic Studies*, 39. 1972.

66. MAS COLELL, A., «La elección social: racionalidad y decisividad», *Moneda y Crédito*, 122. 1972.

67. ———, Introducción a la edición española de «Elección Social y Valores Individuales», de K. Arrow. Instituto de Estudios Fiscales, 1974.

68. MAY, K., «A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision», *Econometrica*, 20. 1952. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*

69. ———, «A note on complete independence of the conditions for simple majority decision», *Econometrica*, 21. 1953. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*

70. MAYSTON, D., «Alternatives to irrelevant alternatives». Presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975.

71. MURAKAMI, Y., *Logic and social choice*, Dover, New York, 1968.

72. NIEMI, R. y WEISBERG, H., «A mathematical solution for the probability of the paradox of voting», *Behavioral Science*, 13. 1968.

73. PATTANAIK, P., «A note on democratic decisions and the existence of choice sets», *Review of Economic Studies*, 35. 1968.

74. ———, *Voting and Collective Choice*, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

75. ———, «On the stability of sincere voting situations», *Journal of Economic Theory*, 6, 1973.

76. ———, «Stability of sincere voting under some classes of non-binary group decision functions», *Journal of Economic Theory*, 8. 1974.

77. ———, «Strategic voting without collusion under binary and democratic group decision rules», *Review of Economic Studies*, 42. 1975.

78. ———, «A note on independence of irrelevant alternatives», mimeo, 1975.

79. ———, «Counter-threats and strategic manipulation under voting schemes», *Review of Economic Studies*, 43. 1976.

80. ———, «Threats, counter-threats and strategic voting», *Econometrica*, 44. 1976.

81. ———, «On the existence of an equilibrium under certain classes of democratic group decision functions», *Discussion Paper* 5/76, La Trobe University, 1976.

82. PLOTT, C., «A notion of equilibrium and its possibility under majority rule», *American Economic Review*, 57. 1967.

83. ———, «Path independence, rationality and social choice», *Econometrica*, 41. 1973.

84. RAY, P., «Independence of irrelevant alternatives», *Econometrica*, 41. 1973.

85. RICHTER, M., «Rational Choice», en *Preferences, Utility and Demand*, editado por Chipman et alii, Harcourt, Brace, Jovanovich, New York, 1971.

86. SAPOSNIK, R., «Power, the economic environment and social choice», *Econometrica*, 42. 1974.

87. ———, «On transitivity of the social preference relation under simple majority rule», *Journal of Economic Theory*, 10. 1975.

88. SATTERTHWAITE, M., «Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions», *Journal of Economic Theory*, 10. 1975.

89. SCHMEIDLER, D. y SONNENSCHEIN, H., «The possibility of a cheatproof social choice function: a theorem of A. Gibbard and M. Satterthwaite», *Discussion Paper*, 89. The Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, 1974.

90. SEGURA, J., «Elección social, cardinalidad, comparabilidad y distribución», *Anales de Economía*, 21-22. 1974.

91. SEN, A., «A possibility theorem on majority decisions», *Econometrica*, 34. 1966.

92. ———, *Collective choice and social welfare*, Holden Day, San Francisco, 1970. Existe traducción castellana, Alianza Editorial, 1976.

93. ———, «Quasi-transitivity, rational choice and collective decision», *Review of Economic Studies*, 36. 1969.

94. ———, «The impossibility of a Paretian liberal», *Journal of Political Economy*, 78. 1970. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*

95. ———, «The impossibility of a Paretian liberal: a reply», *Journal of Political Economy*, 79. 1971.

96. ———, «Social choice theory: a re-evaluation», *Econometrica*, 45. 1977.

97. SEN, A. y PATTANAIK, P., «Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision», *Journal of Economic Theory*, 1. 1969.

98. SLUTSKY, S., «Abstentions and majority equilibrium», *Journal of Economic Theory*, 11. 1975.

99. SMITH, J., «Aggregation of preferences with variable electorate», *Econometrica*, 41. 1973.

100. TULLOCK, G., «The general irrelevance of the general impossibility theorem», *Quarterly Journal of Economics*, 81. 1967. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*

101. VICKREY, W., «Utility, strategy and social decision rules», *Quarterly Journal of Economics*, 74. 1960.

102. WILLIAMSON, O. y SARGENT, T., «Social choice: a probabilistic approach», *Economic Journal*, 73. 1967.

103. WENDELL, R. y THORSON, S., «Some generalizations of social decisions under majority rule», *Econometrica*, 42. 1974.

104. WILSON, R., «On the theory of aggregation», *Journal of Economic Theory*, 10. 1975.

105. YOUNG, H., «An axiomatization of Borda's rule», *Journal of Economic Theory*, 9. 1974.

106. ———, «A note on preference aggregation», *Econometrica*, 42. 1974.

107. ZECKHAUSER, R., «Majority rule with lotteries as alternatives», *Quarterly Journal of Economics*, 83. 1969. Traducido en la Sección de Documentos correspondiente a este mismo número de *H. P. E.*

108. ———, «Voting systems, honest preferences and Pareto optimality», *American Political Science Review*, 1973.